



Nevena Radojevic

Architetto, professore a contratto per l'insegnamento di Geometria Descrittiva presso l'Università di Ferrara. Assegnista di ricerca presso il Dipartimento di progettazione DIDA dell'Università di Firenze. Si occupa di storia e tecnica dei metodi di rappresentazione e collabora ai corsi di Disegno e Rilievo dell'Architettura della prof.ssa Maria Teresa Bartoli.

Le lossodromie circolari del toro. Principio costruttivo di Brunelleschi?

The circular loxodromic lines of torus. Brunelleschi's constructive principle?

Il presente contributo esamina nuove ipotesi circa i processi progettuali e costruttivi che potrebbero aver determinato la forma della vela della volta a ombrello della Cappella Pazzi all'interno del complesso di Santa Croce a Firenze. Le descrizioni fin ora fornite, verificate tramite i modelli tridimensionali derivati dalle scansioni laser della cupola, nonostante si avvicinino alla forma attuale della vela, non danno nessuna spiegazione dei processi progettuali e costruttivi, i quali, spesso, sono la premessa preliminare per descrivere la forma di una cupola. La volta è a doppia vela, dove la vela interna (la superficie concoidale) è ottenuta attraverso una trasformazione tridimensionale della vela esterna (superficie torica), rispetto ad un punto fisso (l'oculo della cupola) e una lunghezza costante (raggio della circonferenza generatrice del toro), con gli stessi principi che servono per ottenere la concoide di Nicomede in 2d.

In the current research, attempts are made to formulate new hypotheses on the processes that could have determined the shape of the sail of the umbrella vault of Pazzi Chapel in Santa Croce church in Florence. The descriptions given so far, verified through three-dimensional models, despite whether drew near to geometry, did not give any explanation of building process, which is a core issue for explaining the peculiar shape of vaults. The analyses are done by correlating detailed surveys and geometric analyses of the vault, comprising the curves, surfaces and the possible masonry texture with the hypothesized form. The vault is double-sailed and the form of the inner sail (conchoid surface) is obtained by a three-dimensional transformation of an outer sail (toric surface), with respect to the fixed point (dome's oculus) and constant length (torus radius), like the Nicomedes conchoid in 2d.

parole chiave: lossodromia del toro, Brunelleschi, Cappella Pazzi, concoide del toro, volta a ombrello

key words: torus rhumb line, Brunelleschi, Pazzi Chapel, conchoid of torus, umbrella vault

INTRODUZIONE

L'architettura brunelleschiana, oggetto secolare di studi e ricerche da ambiti disciplinari diversi, continua a suscitare grande interesse. Si aprono sempre nuove domande verso la comprensione del suo pensiero in-torno alle particolari geometrie messe in opera e le sfide del cantiere ad esso connesse. Negli ultimi decenni, lo sviluppo delle tecnologie avanzate, sia quelle del rilievo digitale sia quelle che riguardano l'elaborazione del dato, hanno messo il disegno dell'architettura in grado di dare un contributo importante alla comprensione di queste geometrie.

L'oggetto di questo studio, che dura ormai da alcuni anni ed è in continuo sviluppo, è la volta ad ombrello della Cappella Pazzi a Firenze. L'edificio è stato iniziato tra il 1429 e il 1430, ma la data di completamento non è certa e oscilla tra il 1443 e il 1478, comunque dopo la morte del Brunelleschi (1446) la Cappella non era ancora del tutto completata. Lo schema costruttivo della cupola, che riprende quello della Sagrestia Vecchia, è a doppio ombrello, formato da dodici semiarchi a tutto sesto tra cui si innestano le vele inferiori e superiori. Il manto di copertura è formato da tegole piane in terracotta a forma di scaglia, adatte per rivestire superfici curve. La volta è costruita da un sistema di costoloni che convergono verso il centro, chiudendosi in un anello che sostiene una piccola lanterna.

Una sintesi degli studi condotti dall'autore su questo tema è già stata pubblicata in *Linee di ricerca nell'area del Disegno* stampato in occasione del IX congresso UID. Il presente saggio è dedicato a un aspetto non approfondito in precedenza¹, la cui illustrazione richiede una breve sintesi dei risultati raggiunti. Il tema della ricerca è il rapporto tra la particolare geometria della vela e alcune misure, che all'inizio non sembravano avere nessun significato particolare. La volta a doppio ombrello² della Cappella Pazzi è costruita sulla base di un dodecagono regolare, i cui lati misurano circa 4.90 braccia fiorentine, mentre il raggio della circonferenza circoscritta è di 9.60 braccia, misure a primo avviso un po' insolite per l'architettura brunelleschiana, espressa spesso con numeri interi. Anche la larghezza dei costoloni presenta una misura inattesa di 0.38 braccia. Possono questi essere i dati di partenza per ideare la forma di una vela, oppure sono le conseguenze di un processo che ha tutt'altro dato d'input?

<http://disegnarecon.univaq.it>

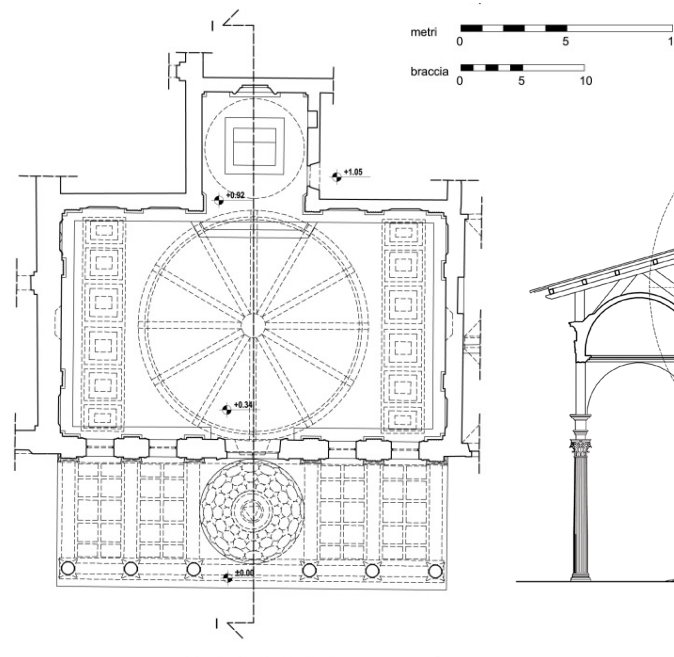


Fig. 1 (in alto)
Pianta della Cappella Pazzi. Il complesso di Santa è stato rilevato nell'ambito del Progetto di ricerca Laboratorio Santa Croce (vedi nota 7).
Fig. 2 (in basso)
Visualizzazione del modello Mesh ottenuto dalla nuvola di punti.

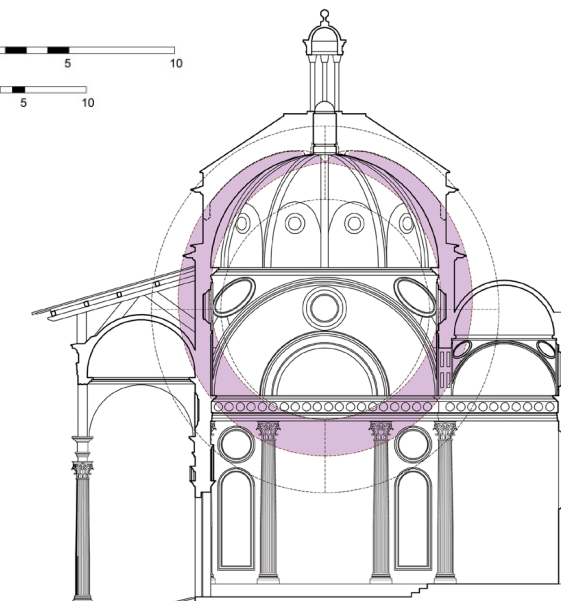


Fig. 3 (in alto)
Sezione della Cappella Pazzi.
Fig. 4 (in basso)
Sezione dell'unghia (in rosso la sezione della mesh, in nero sezione della vela concoidale ipotizzata)

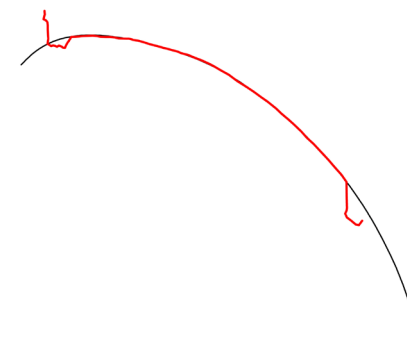




Fig. 5
Vista dall'interno della volta a ombrello

Altro aspetto curioso è l'attacco tra la vela e il costolone. Mentre i costoloni sono generati dagli archi di circonferenza e costruiti con una precisione spaventosa (quando si sovrappongono tutti i 12 costoloni della scansione laser tra di loro la massima distanza tra due punti misura 2,7 cm), la linea d'imposta della vela sul costolone non è circolare. Quindi, l'altezza del costolone non è costante; essa varia tra un terzo e mezzo braccio senza evidenti regolarità. Anche la sezione dell'unghia è molto difficilmente assimilabile all'arco di circonferenza, e la precisione della costruzione delle unghie è leggermente inferiore rispetto a quella dei costoloni. La massima distanza tra i due punti delle sezioni sovrapposte dalle 12 scansioni in questo caso è intorno a 4 cm.



Fig. 6
Prospettiva della Cappella Pazzi - Disegno di P. A. Rossi

LA GEOMETRIA DELLA VELA

Prima di passare all'analisi della geometria della vela, vorrei menzionare alcuni studi precedenti, i cui risultati sono apparsi interessanti da diversi punti di vista³. Il primo è lo studio molto rigoroso, condotto da Leonardo Baglioni⁴, che esamina una serie di sezioni del modello numerico *mesh* rilevato. La superficie *nurbs* da lui ipotizzata, per approssimare il modello numerico, è risultata molto vicina a quella rilevata. Tale superficie è ottenuta facendo scorrere un arco a raggio variabile su due direttrici circolari (due archi di circonferenza rappresentati dai bordi superiori dei costoloni). Il raggio dell'arco generatore (che ruota intorno all'asse perpendicolare all'unghia e passante per il centro della

cupola) è ottenuto, di volta in volta, approssimando le sezioni radiali del modello *mesh* agli archi di circonferenza. Esso diminuisce andando verso l'alto. La superficie ottenuta in questa maniera approssima abbastanza bene la forma della vela, e fa capire che il raggio della circonferenza generatrice non può essere costante (il che sarebbe molto vantaggioso nella fase di realizzazione delle centine) perché si discosterebbe significativamente dalla superficie rilevata. Tra l'altro, essendo la geometria ipotizzata troppo vincolata al dato rilevato (per idearla da capo ci vorrebbero troppi dati d'input), si aprono domande circa la logica della sua genesi e circa il modo di costruirla (in questo caso ci vorrebbero molte centine, tutte diverse tra di loro). Rimane molto difficile da intravedere una regola sia per la distribuzione dei centri delle circonferenze generatrici che per la diminuzione dei loro raggi.

L'altro studio invece, condotto da Piero Salemi⁵, ipotizza una vela torica tra due costoloni, dove i costoloni rappresentano le circonferenze di Villarceau. Anche se la superficie generata in questa maniera non dà i risultati soddisfacenti nella fase del confronto con il modello rilevato, l'ipotesi rimane molto interessante, specialmente se si pensa ai vantaggi costruttivi che una superficie del genere potrebbe offrire. Essa è, quindi, a tre direttrici circolari (costoloni e unghia) e arco generatore a curvatura costante. Il dato d'input in questo caso sarebbe uno solo, il lato del poligono sul quale poggia la cupola! In seguito vedremo se questa superficie può veramente essere stata pensata, non per la vela interna, perché non le corrisponde, ma in un'altra fase del progetto.

Dalla prima ipotesi menzionata risulta evidente che il raggio della *circonferenza* generatrice non può essere costante (la vela sembra gonfiarsi andando verso l'alto). Facendo, in seguito, varie ipotesi generative che seguono le geometrie più rigorose della genesi della vela è risultato molto difficile avvicinarsi alla sua forma attuale⁶. L'unica forma ipotizzata, generata dagli archi di circonferenza, che si avvicina a quella rilevata è la superficie supposta da L. Baglioni, ma rimane poco credibile che Brunelleschi abbia pensato una forma di così complessa e costosa realizzazione, che difficilmente rispecchia i rigorosi principi riscontrati nelle altre sue opere. La sezione dell'unghia non è un arco di circonferenza, ma rappresenta una curva particolare (fig. 4), e le sezioni radiali della vela, se discretizzate con gli archi

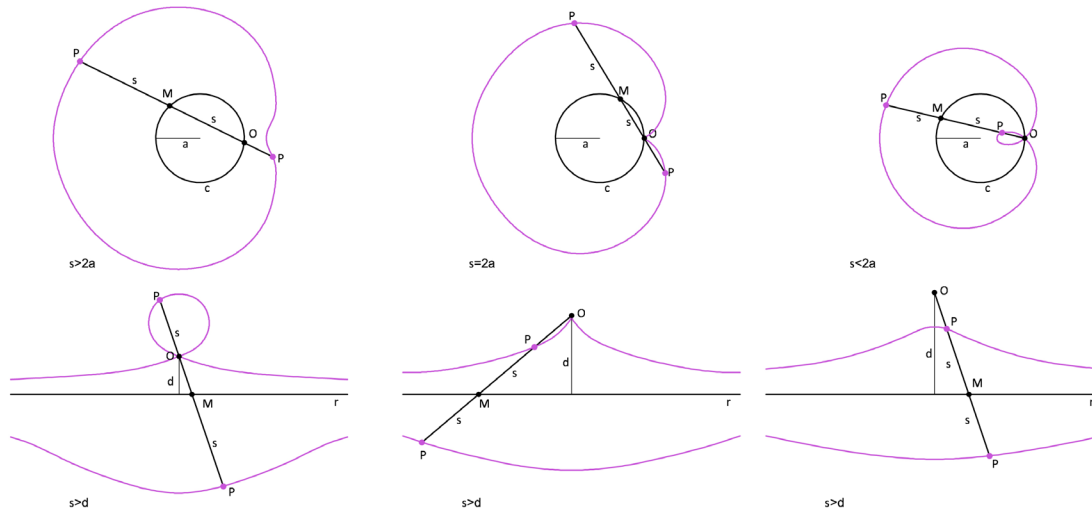


Fig. 7

Costruzione della concoide della circonferenza (sopra) e quella della retta, detta anche concoide di Nicomede (sotto). Su una retta uscente da O, a partire dalle intersezioni M con la curva c (o retta r nel caso sotto) si riporta da entrambe le parti un segmento MP di lunghezza s prefissata. Concoide della curva c (o retta r) è il luogo dei punti P al variare delle rette passante per O.

di circonferenza, non fanno intravedere una logica né nella distribuzione dei loro centri, né nella degradazione dei loro raggi andando verso l'alto.

Per queste ragioni, e cercando di trovare un metodo progettuale che potesse rispecchiare la purezza della forma brunelleschiana, si è voluto approfondire questo argomento, partendo da alcune domande:

-Come è possibile ottenere una forma simile a quella rilevata rispettando una regola ben precisa e semplice da realizzare, con poche centine o addirittura senza?

-Con quale curva si approssima la sezione dell'unghia, e qual è la legge che governa la diminuzione dei raggi dell'arco generatore?

-Quanti dati d'input ci vorrebbero per descrivere la forma della vela in maniera univoca, e quali sono?

Questo studio della cupola della Cappella Pazzi, svolto sulla base del Rilievo Integrato⁷, parte più o meno con queste premesse.

LA CONCOIDE DEL TORO

Come abbiamo già detto, la forma geometricamente più pulita per descrivere la vela tra i due costoloni circolari sarebbe la porzione della superficie torica, dove i costoloni rappresentano le circonferenze di Villarceau.

Com'è dimostrato, infatti, dal matematico e astronomo francese Yvon Villarceau (1813-1883), per ogni punto del toro passano quattro circonferenze. Due di queste sono di facile individuazione e sono: una sul piano parallelo al piano equatoriale del toro, e l'altra sul piano perpendicolare a questo e passante per il centro del toro. Altre due sono le circonferenze di Villarceau appartenenti ai piani bi-tangenti⁸. Nel 1903 è stato dimostrato che queste circonferenze tagliano sia i paralleli che i meridiani della superficie con angolo costante e quindi rappresentano anche le lossodromie⁹ del toro. Queste caratteristiche, come si può facilmente intuire, possono dare notevoli vantaggi nella fase esecutiva di una vela torica.

La superficie del toro fin ora descritta non assomiglia alla superficie interna della vela della volta a ombrello in esame, come abbiamo già accennato. Essa risulta troppo piatta, specialmente nella parte alta, dove la vela sembra gonfiarsi sempre di più. Cercando però di capire quale potrebbe essere un'altra superficie, che si possa costruire senza avere bisogno di fare infinite centine di raggio diverso, abbiamo provato a deformare la superficie del toro, seguendo una regola ben precisa, che verrà descritta in seguito.

Nella fase di sovrapposizione tra la superficie ottenuta e quella rilevata, il risultato è stato molto sor-

prendente: la superficie ottenuta si è rivelata essere la concoide tridimensionale del toro, cioè una trasformazione della superficie torica governata dalle stesse regole che servono per ottenere una concoide bidimensionale. (figg. 9, 10)

In matematica, la concoide di una data curva c, rispetto a un punto O, è così definita: su una retta uscente da O, a partire dalle intersezioni M con la curva c, si riporta (da una parte e dall'altra) un segmento MP (intervallo) di lunghezza s prefissata. Concoide della curva C è il luogo dei punti P al variare della retta per O. La concoide della retta (o concoide di Nicomede) risulta essere la curva del 4° ordine di equazione:

$(x - d)^2 * (x^2 + y^2) - s^2 * x^2 = 0$, dove d è la distanza di O dalla retta r e assi x e y sono la perpendicolare e la parallela alla r, per O. La concoide della circonferenza (rispetto a un punto O su di essa) è la lumaca di Pascal che assume, per la sua forma, il nome di cardiode quando, in particolare, $s = 2a$ (a è il raggio del cerchio) e O appartiene alla circonferenza (fig. 7).

Nel caso della Cappella Pazzi, si tratta di una concoide tridimensionale, che in seguito chiameremo concoide del toro (figg. 9, 10, 11).

Questa particolare concoide è ottenuta riportando (verso interno) da ogni punto M della superficie torica un segmento s, uguale al raggio della circonferenza

generatrice, su una retta uscente dal punto O, che rappresenta il centro della circonferenza generatrice più alta. Questo punto coincide con l'oculo della cupola, dove la superficie conoidale si riduce a 0.

Sovrapponendo la superficie descritta sopra al modello *mesh* ottenuto dalla nuvola di punti si ha un risultato molto sorprendente. La maggior parte dei punti sta nel *range* da 0 a 3 cm (fig. 8). Tutti gli altri distano massimo 5 cm (zona celeste e verde), e la distribuzione di queste zone è diversa da vela a vela. Questa distribuzione disomogenea delle zone di maggior deviazione tra i punti appartenenti alle due superfici è positiva nel caso della verifica, perché allude alle imprecisioni dovute alla costruzione, oppure a varie deformazioni che la struttura potrebbe aver subito negli anni. Se la distribuzione degli errori fosse stata più omogenea la ragione sarebbe stata da cercare nelle geometrie non corrispondenti. La maggior discrepanza tra i due modelli si verifica proprio nelle zone d'attacco con i costoloni, le quali sono difficili da eseguire con il metodo costruttivo che andremo a descrivere.

Questa forma, apparentemente molto complessa e elaborata, offre numerosi vantaggi costruttivi, ed è anche, nello stesso tempo molto evocativa, se legata ai ragionamenti astronomici correnti. Siamo nel momento in cui il modello tolemaico dell'universo comincia a mostrare le sue insufficienze, e le proposte risolutorie ipotizzano i movimenti complessi dei pianeti, che generano nuove immagini di figure dinamiche. La genesi geometrica dell'unghia della volta a ombrello, descritta come una trasformazione tridimensionale di un toro, sembra in linea con i ragionamenti astronomici correnti. Una scelta progettuale molto particolare, che potrebbe aver trovato nutrimento nel pensiero scientifico-astronomico che precede la rivoluzione copernicana. Il tema dei movimenti apparenti dei pianeti visti dalla Terra è, infatti, molto affine a quello della proiezione centrale. La forma dell'unghia, che a un osservatore posto sulla *Terra* (o pavimento) mostra tutta la sua complessità, vista dal *Sole* (cioè oculo della cupola, il punto irraggiungibile) rileva la sua semplice geometria; non diversa da un toro.

L'altro aspetto che interessa rimarcare è il processo progettuale che è, nel caso della Cappella Pazzi, ancora più insolito, e potrebbe essere paragonato, a quello che oggi si considera architettura generativa, perché è proprio un processo, e non un disegno, quello che ha

definito la forma della volta della Cappella Pazzi.

IL TORO DELLA VOLTA A OMBRELLINO DELLA CAPPELLA PAZZI

Per costruire la vela conoidale, la vela torica non deve necessariamente esistere nella realtà fisica, ma può essere rappresentata da una centina mobile che scorre lungo i costoloni. Da questa centina si fa partire una serie di fili che passano per un anello posto nell'oculo, sui quali sono segnalate le lunghezze pari al raggio del toro, r (in questo caso 2 braccia e mezzo). Man mano che la centina scorre verso l'alto, i fili si tirano in modo che siano sempre ben tesi, e i segni su di loro determinano i punti appartenenti alla superficie della conoide. Un ragionamento molto affine a quello che trasforma la realtà fisica nell'immagine bidimensionale in proiezione centrale, soltanto che i raggi visivi non intersecano il quadro, ma un'ipotetica sfera che scorre sulla superficie torica.

I disegni concernenti i rilievi della cappella Pazzi fatti negli anni '60 da P. A. Rossi, mostrano la struttura a doppia vela (che oggi non è visibile), e l'andamento radiale dei mattoni che stanno sopra i costoloni (fig. 6). Queste caratteristiche fanno supporre che la vela torica potrebbe realmente esistere tra la copertura e la vela interna. Sovrapponendo il disegno della vela torica ipotizzata alla sezione della cupola si ottiene un risultato molto plausibile. La vela torica s'inserisce molto bene tra le due superfici rilevate (l'intradosso della vela interna e l'estradosso della copertura) e risulta quasi tangente alla copertura (fig. 11).

In quanto riguarda la superficie torica, abbiamo accennato che i costoloni della cupola rappresentano le circonferenze di Villarceau, le quali sono anche le curve lossodromie¹⁰ del toro; lossodromie molto particolari, che essendo circolari, sono anche descritte come l'intersezione tra il toro e la sfera avente il centro sempre coincidente con il centro della rispettiva circonferenza di Villarceau (fig. 17).

Come è noto, la superficie del toro (come superficie di rotazione), una volta definiti gli elementi principali, si può generare in due modi:

1. Facendo scorrere la circonferenza generatrice di raggio r lungo la circonferenza direttrice di raggio R (circonferenza massima del toro). Quindi, l'asse di rotazione passa per il centro della circonferenza direttrice ed

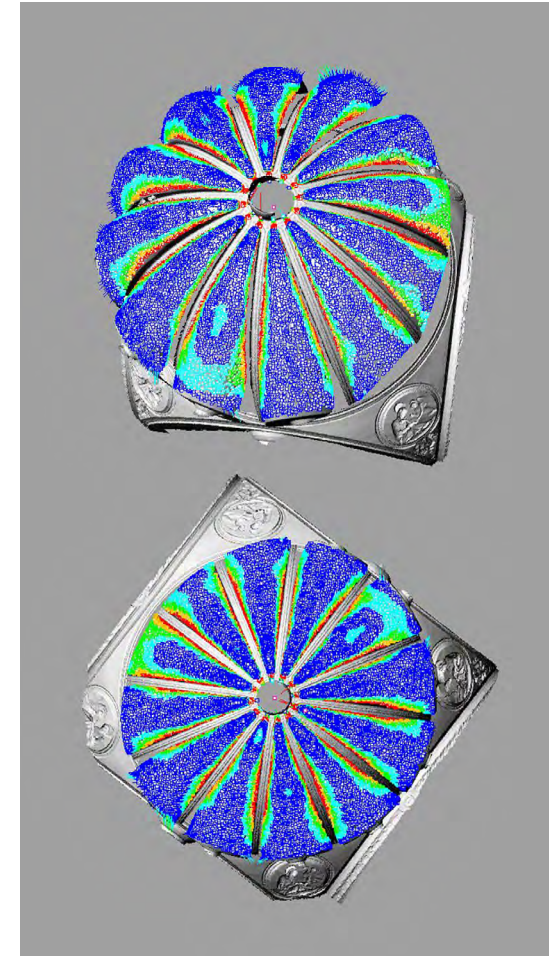


Fig. 8
Sovrapposizione della superficie conoidale ipotizzata alla superficie *mesh* rilevata. La maggior parte dei punti sta nel *range* da 0 a 3 cm (zona blu nell'immagine). Tutti gli altri distano massimo 5 cm (zone celeste e verde), e la distribuzione di queste zone è diversa da vela a vela. Il risultato si considera più che soddisfacente, data anche la disomogeneità della distribuzione delle zone di distacco (celeste, verde, giallo e rosso). Essa, infatti, allude alle imprecisioni dovute al cantiere e varie deformazioni che struttura ha subito negli anni.

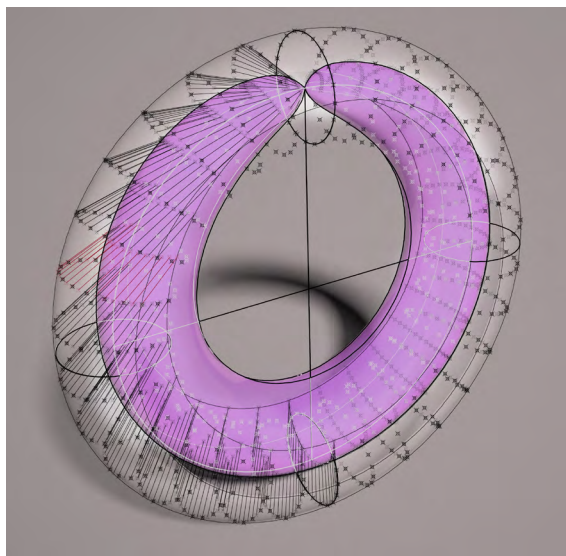


Fig. 9
Concoide del toro, visualizzazione tridimensionale
Il modello digitale è stato elaborato attraverso le equazioni parametriche sviluppate da prof. Giuseppe Conti utilizzando il plug-in Grasshopper di Rhinoceros.

è perpendicolare al suo piano (fig. 13);

2. Facendo ruotare la circonferenza di Villarceau intorno allo stesso asse di rotazione (definito nel punto 1), che adesso risulta inclinato rispetto al piano di questa circonferenza (figg. 12, 13, 14). Le circonferenze di Villarceau appartengono ai piani bi-tangenti.

Considerando qualsiasi piano che passa per due circonferenze generatrici si può individuare l'angolo che questi piani formano con il piano della circonferenza direttrice. Tale angolo è compreso tra la retta che unisce i centri delle due circonferenze generatrici e la tangente a qualsiasi di loro dal centro del toro (fig. 14).

Prima ancora di esaminare i casi di costruzione del toro a partire dalle circonferenze di Villarceau vedremo alcune caratteristiche di esse rispetto al toro di appartenenza, che sono determinanti nella costruzione nel caso della cupola. Per la lunghezza della trattazione, le dimostrazioni verranno omesse in questa sede, ma tante di esse si possono facilmente intuire osservando

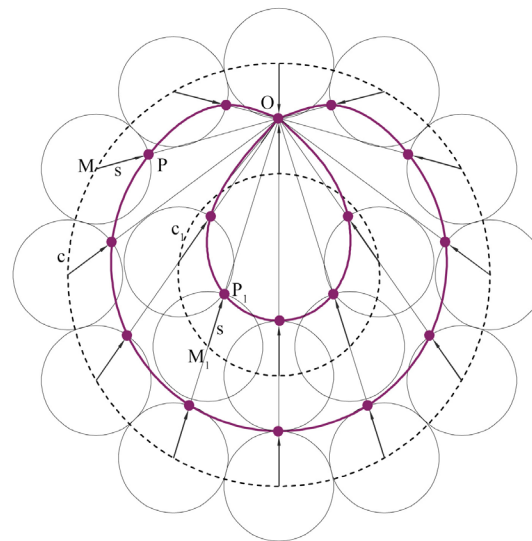


Fig. 10
Sezione dell'unghia (tratteggiato - il toro, in viola - la concoide)
Su una retta uscente da O (oculo della cupola), a partire dalle intersezioni M con la curva C (circonferenza massima del toro), si riporta un segmento MP di lunghezza s prefissata (raggio della circonferenza generatrice del toro).

i disegni (figg. 12-17):

- il raggio della circonferenza di Villarceau è uguale al raggio della circonferenza direttrice del toro, R (fig. 10);
- il diametro della circonferenza generatrice, $2r$, è dato dalla distanza tra i due centri delle circonferenze di Villarceau, che quindi non coincidono con il centro del toro (fig. 15);
- l'asse di rotazione delle circonferenze di Villarceau coincide con l'asse di rotazione della circonferenza generatrice del toro;
- se la circonferenza di Villarceau si considera come la curva lossodromia del toro, la sua pendenza è pari all'angolo compreso tra il piano della circonferenza direttrice e il piano di Villarceau (figg. 14, 15).

COSTRUZIONE DELLA VOLTA A OMBRELLO

Nel caso della vela della volta a ombrello, il problema si presenta più o meno così: data una coppia di circonfere-

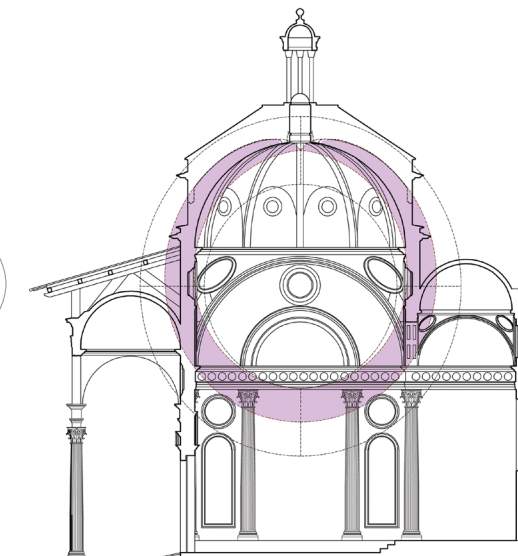


Fig. 11
Sezione della volta passante per l'unghia della vela. Sovrapposizione con il toro e la concoide ipotizzati. La concoide è visualizzata per metà della circonferenza generatrice, r, del toro.

renze di Villarceau, simmetriche rispetto al piano della circonferenza direttrice del toro, trovare il toro che le contiene (figg. 16, 17).

I punti d'intersezione tra le due circonferenze V1 e V2 individuano un segmento, la cui lunghezza è uguale al diametro della circonferenza direttrice del toro, $2R$, che appartiene al piano bisettore tra i due piani contenenti le circonferenze date (costoloni della cupola). Individuati questi due elementi, si tratta di trovare il centro del toro C, che non coincide con il centro delle circonferenze di Villarceau O (il centro della cupola). Visto che un estremo della retta V1V2 appartiene al parallelo massimo del toro (il più esterno), e l'altro a quello minimo (il più interno), il centro del toro C, dista 2 braccia e mezzo (valore del raggio r) dal centro della cupola O. Il diametro della circonferenza generatrice, $2r$ è dato dalla distanza tra i punti A e B delle circonferenze assegnate (il lato del poligono su cui poggia la cupola), e appartiene al piano perpendicolare al piano bisettore,

passante per il punto C. Anche l'asse di rotazione è perpendicolare al piano bisettore e passante per il centro del toro.

ALCUNI VANTAGGI COSTRUTTIVI

Interessante è osservare come sono disposti i centri delle circonferenze di Villarceau. Facendole ruotare intorno all'asse di rotazione, i loro centri scorrono lungo la circonferenza del raggio r , appartenente al piano bisettore tra i due costoloni (fig. 17). Quindi, per determinare i luoghi geometrici di queste circonferenze, sarebbe necessaria una specie di sfera armillare fissata nel centro del toro e divisa in 12 cerchi meridiani, quante sono le vele, a loro volta divisi in tante parti quante lossodromie vogliamo avere per una vela. I punti così ottenuti saranno i centri delle sfere alle quali appartengono nostre lossodromie.

A questo punto, per individuare cerchio della sfera che appartiene anche al toro, basterebbe introdurre un ulteriore vincolo: la pendenza che tale curva ha rispetto alla superficie torica. Una volta determinata la pendenza (che è nel nostro caso 1:4, come vedremo in seguito), basta disporre i mattoni dello stesso rapporto di dimensioni a spina di pesce sul toro (figg. 20, 21).

In via teorica, questi due vincoli dovrebbero bastare per determinare tale curva nello spazio, con una sola corda, partendo da almeno una fila dei mattoni disposti sulla circonferenza generatrice del toro (fig. 21).

Tuttavia, questo non è l'unico modo per realizzare la superficie torica. Visto che si tratta di una superficie che ha la sezione a curvatura costante, si può realizzare anche con una centina scorrevole, riducendo l'arco mano a mano che la costruzione sale. Potrebbero anche essere stati impiegati entrambi di questi metodi, dove il discorso della lossodromia facilita notevolmente la costruzione e ci permette di usare un numero molto limitato delle centine di controllo. Tuttavia, in questo momento non è possibile verificare tale ipotesi perché la superficie torica non è rilevabile, come non lo sono nemmeno i suoi mattoni.

LA PENDENZA DELLA LOSSODROMIA E SPINA-PESCE

La *spinapesce* consiste nell'inserire, a distanze regolari, un mattone posto in piedi o *a coltello* nel filare dei

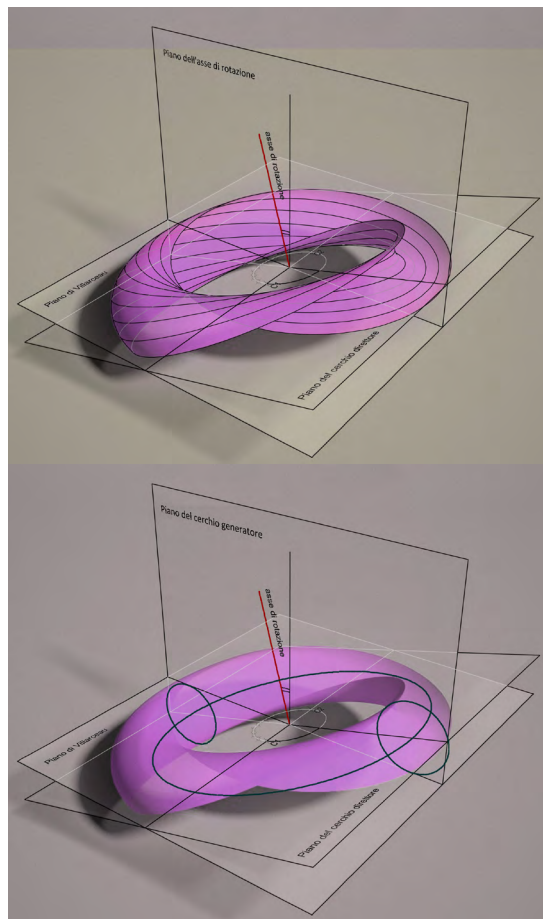


Fig. 12 (in alto) Costruzione del toro a partire dalle circonferenze di Villarceau. L'immagine mostra la distribuzione dei centri delle circonferenze, appartenenti all'anello centrale.

Fig. 13 (in basso) Costruzione del toro come superficie di rotazione della circonferenza generatrice intorno all'asse di rotazione (in rosso). Mutua posizione tra il piano della circonferenza direttrice e quello contenente la circonferenza di Villarceau.

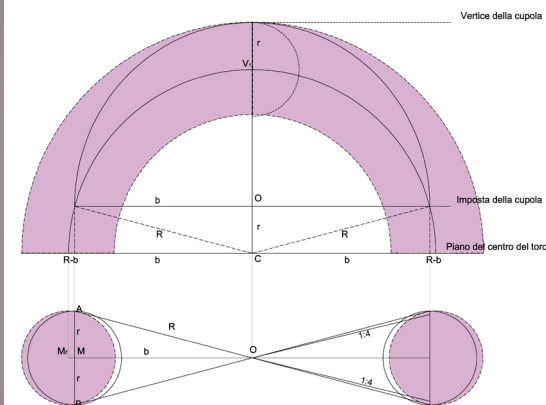
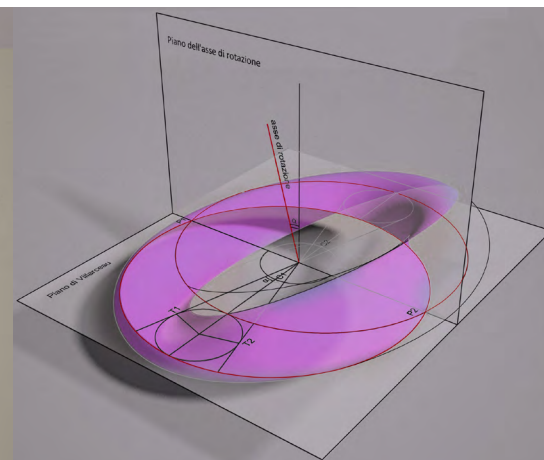


Fig. 14 (in alto) Costruzione del toro a partire dalle circonferenze di Villarceau. Visualizzazione di una coppia di circonferenze di Villarceau appartenenti allo stesso piano.

Fig. 15 (in basso) Costruzione del toro compreso tra due circonferenze di Villarceau, simmetriche rispetto al piano della circonferenza direttrice del toro. Il raggio della cupola (b) di 9.6 braccia deriva dal raggio del toro (R) di 10 braccia esatte. Il rapporto di 1:4 tra i due raggi del toro (che rappresenta anche la pendenza della lossodromia) determina la larghezza del costolone di 0.38 braccia.

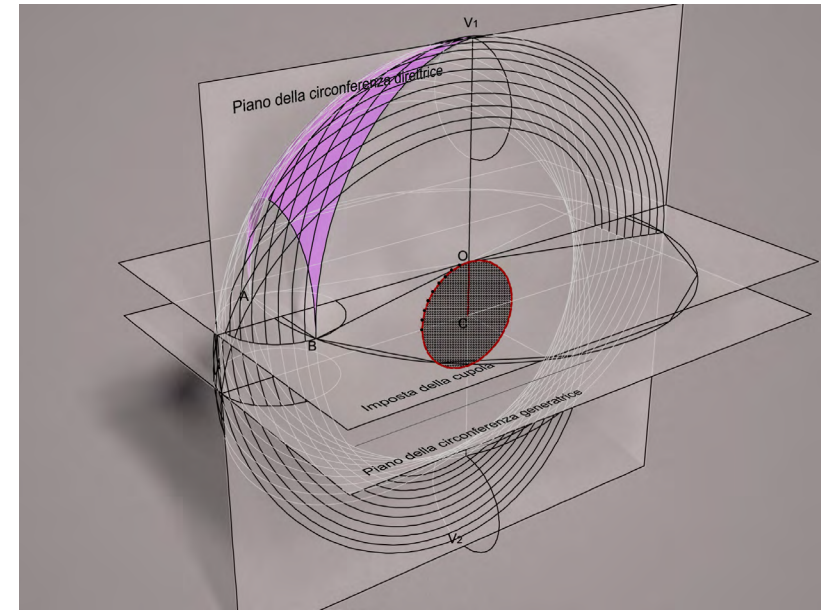
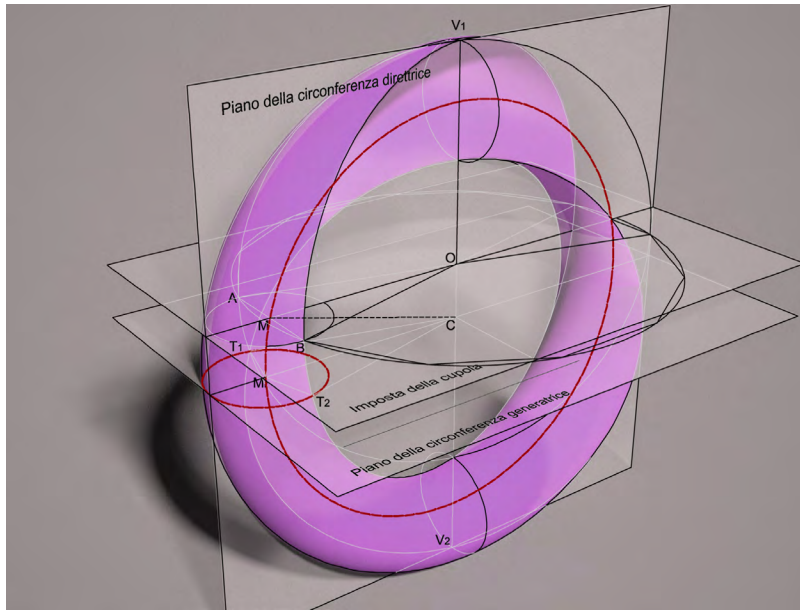


Fig. 16 (a sinistra)

Costruzione del toro compreso tra due circonferenze di Villarceau nel caso della volta a ombrello sulla base del dodecagono regolare. Rotazione di 180° .

Fig. 17 (a destra)

Facendo ruotare le circonferenze di Villarceau intorno all'asse parallelo ad AB e passante per C i loro centri ruotano lungo la circonferenza evidenziata.

mattoni posti in piano o *di piatto*, con quali va murando la cupola. Il mattone posto per coltello, bloccato tra gli altri e sporgente dal piano di posa, costituisce una sorta di sponda, che impedisce al filare successivo di scivolare verso l'interno della cupola. Il procedimento è ripetuto ad ogni giro ed il mattone a coltello è sempre affiancato a quello del filare più basso e risulta così sfalsato dello spessore del mattone stesso. La cupola si può costruire senza tracciamenti ausiliari sul piano d'imposta, per mezzo della semplice giustapposizione dei mattoni per coltello che da sé è in grado di produrre i due risultati: statico e estetico. Essendo la loxodromia una curva a inclinazione invariabile rispetto ai meridiani, si può facilmente ottenere camminando con passo costante su una qualsiasi superficie.

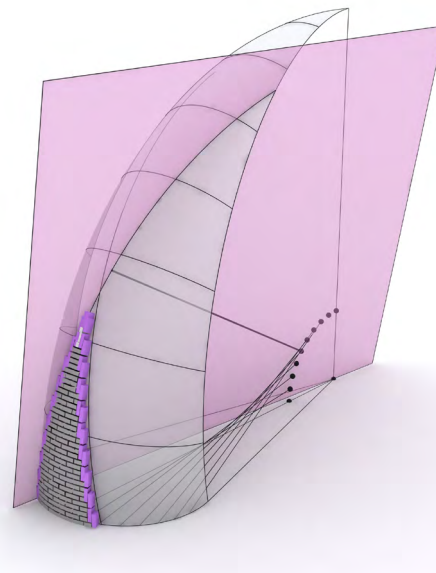
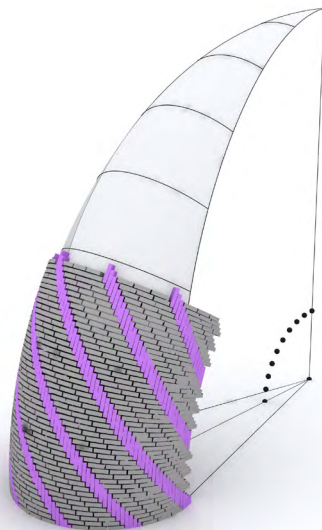
Come abbiamo accennato, nel caso del toro siamo in presenza di una particolare famiglia di loxodromie circolari. La loro pendenza è pari al rapporto tra i due rag-

gi, R/r . Su una volta a crociera quindi, fatta con le vele toriche a base quadrata, la pendenza della loxodromia circolare sarebbe 1:2. Nel nostro caso (la base è un dodecagono) la pendenza è data dalla metà dell'angolo interno, $360^\circ/12/2 = 15^\circ$ il che corrisponde alla pendenza di $1 : 3.73$ rispetto all'asse (fig. 15). Facendo la pendenza di $1 : 4$ – dal centro del poligono, si arriva ad un punto sul lato AB che dista 0.19 braccia dal vertice – il che corrisponde alla metà dello spessore del costolone rilevato (0.38 braccia). Aggiungendo lo spessore del costolone, quindi, tutte le misure menzionate all'inizio improvvisamente trovano un senso. Le misure dei raggi del toro così diventano 10 braccia fiorentine per il raggio maggiore e 2,5 braccia per quello minore! Queste, in questo caso, diventano le misure dalle quali è partito il ragionamento.

La spina a pesce non si può costruire facilmente, con i mattoni delle dimensioni uguali, per una pendenza che

non sia di rapporto tra numeri interi e pari. Nel nostro caso è stata fatta un'ipotesi sulla possibile tessitura muraria di una spinapesce, dove per i mattoni che costituiscono i filari verticali i pezzi utilizzati sono di $3/4$ della lunghezza. Mettendo due di questi si ottiene una sovrapposizione lunga mezzo mattone tra i filari adiacenti (figg. 19, 20, 21).

La costruzione, in questo caso, potrebbe partire dalla prima fila dei mattoni orizzontali orientati in base alla centina circolare che rappresenta una delle sezioni radiali del toro. Il passo successivo consisterebbe nel disporre i mattoni verticali, inclinandoli in maniera tale che i centri siano tangenti alla sfera contenente la curva loxodromia. Una volta che abbiamo posizionato un certo numero di questi mattoni, possiamo continuare con le file orizzontali che seguono gli andamenti della fila sottostante sui meridiani del toro, e l'orientamento dei mattoni verticali sui paralleli.



Il raggio delle sfere alle quali appartengono le lossodromie è sempre pari al raggio dei costoloni, e i loro centri scorrono sulla circonferenza appartenente al piano bisettore, del raggio pari a quello del toro, r . Per qualsiasi punto di partenza è possibile trovare il centro della sfera sulla circonferenza applicando il procedimento inverso (fig. 20). Dal punto dal quale si deve far partire la circonferenza, si tira una corda pari al raggio R , la quale tocca la circonferenza nel centro della sfera alla quale appartiene. Facendo appartenere i mattoni disposti in rapporto 1:4 a questa sfera, nello stesso tempo li abbiamo fatti appartenere anche al toro. Con questi due vincoli è possibile descrivere questa particolare lossodromia del toro nello spazio.

Come abbiamo già accennato, questo procedimento può rivelarsi molto utile, specialmente per descrivere le parti intermedie tra due distinti meridiani del toro, i quali, nonostante siano del raggio costante diminuiscono di settore, e quindi le centine andrebbero sempre ridotte procedendo verso alto.

Una volta costruito il toro, possiamo utilizzare lo stesso anello con la corda scorrevole, che apparteneva alla sfera armillare fissata nel centro del toro, per trovare

i punti della seconda vela, quella conoidale. Per tale scopo, la centina circolare con la corda si sposta dal centro del toro, e si appoggia sulla superficie della vela torica costruita. La corda scorrevole, sulla quale è fissata la lunghezza di 2 braccia e mezzo con un segno, si fa passare per un'anello fissato nell'oculo. Visto che la lunghezza complessiva della corda varia dal punto in punto, essa si deve tenere in modo che sia sempre ben tesa. Scorrendo con questa corda lungo il toro stiamo descrivendo i punti appartenenti alla conoide nello spazio.

CONCLUSIONI

Le volte in laterizio del passato sono descritte nei manuali tecnici e costruttivi in una maniera poco esaustiva. Mentre la descrizione dei principi geometrici che stanno alla base della genesi geometrica possono a volte sembrare molto chiari e precisi, la manualistica manca di sufficiente chiarezza in alcuni punti critici che riguardano la realizzazione. In particolare, la geometria precisa dei corsi di mattoni non è mai descritta né le eventuali conseguenze che l'uso di un particolare

Fig. 18

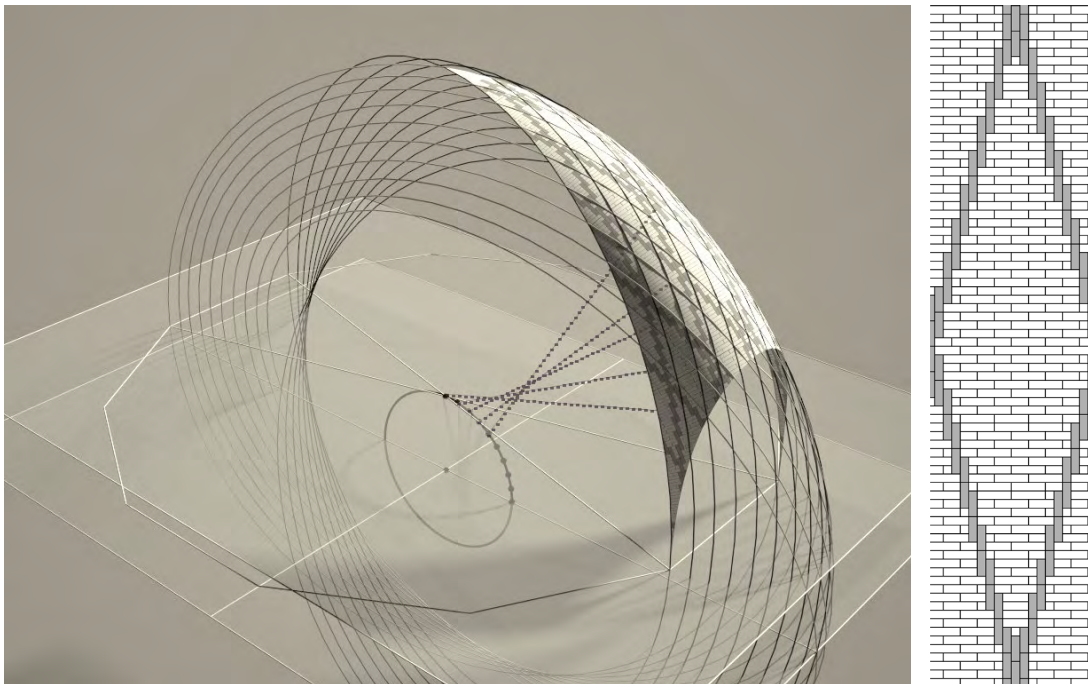
Modello digitale della tessitura muraria a spina di pesce sulla superficie torica. La pendenza della lossodromia, formata dai mattoni messi per coltello è di 1:2 – le curve sono sghembe.

Fig. 19

La pendenza della lossodromia è di 1:4 in questo caso – la curva è una delle circonferenze di Villarceau appartenente al piano evidenziato in viola.

tessuto murario può avere sulla forma della vela. La mancanza di queste descrizioni fa pensare che i maestri presenti nei cantieri possedessero le tecniche ben consolidate, e che nel tempo si siano perse. Ciò si deve sicuramente al fatto che gli architetti, principali destinatari di queste opere, all'epoca non si dovevano occupare dei problemi pratici di come mettere i mattoni in una volta; peraltro gli artigiani avevano sufficienti conoscenze acquistate dalla tradizione e nella pratica corrente e non avevano bisogno di istruzioni scritte o grafiche. Oggi non si dà più per scontata questa condizione: pochissimi artigiani sono ancora in grado di costruire volte, e le tecniche tradizionali rischiano di essere irrimediabilmente perdute. «In questo quadro, appare necessario sviluppare una descrizione tecnica che sia più dettagliata della manualistica tradizionale e fornisca esplicitazioni anche di quegli aspetti che in passato non avevano bisogno di chiarimenti»¹¹.

Per le volte delle cupole, come riferisce il Manetti, Brunelleschi introduce nei cantieri nuovi sistemi di realizzazione. Oltre ai ponteggi, alle armature e alle centine, il suo biografo parla di una "pertica", una canna incernierata «che girassi per tutto a poco a poco in su

**Fig. 20 (a sinistra)**

Ipotesi sulla disposizione dei mattoni nella vela torica. In grigio: le loxodromie circolari. I centri delle circonferenze sono distribuiti lungo l'anello fissato nel centro del toro.

Fig. 21 (a destra)

La tessitura muraria ipotizzata per la pendenza 1:4. I mattoni messi per coltello sono di tre quarti (in grigio).

restringendo»¹², in modo da generare una particolare superficie curva. È probabile che questo strumento, utilizzato per le cupole di San Lorenzo, sia stato adottato anche per la realizzazione delle vele della Cappella Pazzi.

A proposito degli studi condotti da ser Filippo sulle rovine degli antichi complessi architettonici romani Manetti scrive: «[...] vide el modo di murare degli antichi et le loro simmetrie; e parvegli conoscere un certo ordine di membri e d'ossa [...]».

La tecnica delle volte a creste e vele è descritta in modo sommario da Manetti nella sua biografia del Brunelleschi ed è illustrata nel disegno che si conserva agli Uffizi a Firenze, che descrive chiaramente questo metodo. Il disegno è quasi certamente di Antonio da Sangallo il Vecchio ed è intitolato: “volte tonde di mezzane quali si costruiscono senza armature in Firenze”. Parlando di una cappella che si doveva fare in Santo Jacopino

Oltrarno, Manetti scrive:

«[...] e disse che mostrerebbe [...] come si potessi fare; e così fece: e fu la prima che si volgessi a Firenze in quella forma, che si dice ancora a creste e a vela, si legge a proposito della dimostrazione offerta dal Brunelleschi per costruire una cupola senza armature».

Come nota Lando Bartoli: «[...] queste due espressioni non possono non essere collegate con le immagini delle cupole e delle volte che i romani realizzarono mettendo chiaramente in evidenza un certo ordine di membri e d'ossa, distinguendo, nella struttura voltata, zone di conglomerato o muratura concezionale “membrata” delimitate da strutture organizzate secondo archi meridiani e paralleli “ossa”»¹³.

Il disegno di Antonio da Sangallo il Vecchio mostra l'apparecchio di mattoni a spinapesce nel quale sono distinguibili, sia per forma sia per funzione strutturale, le creste ad andamento a elica nelle quali ciascun

componente è orientato e disposto secondo il proprio arco meridiano. La vela è compresa tra due creste, e disposta sul piano orizzontale e si propone come concio di un arco: «[...] queste sono allora le membra e quelle le ossa»¹⁴.

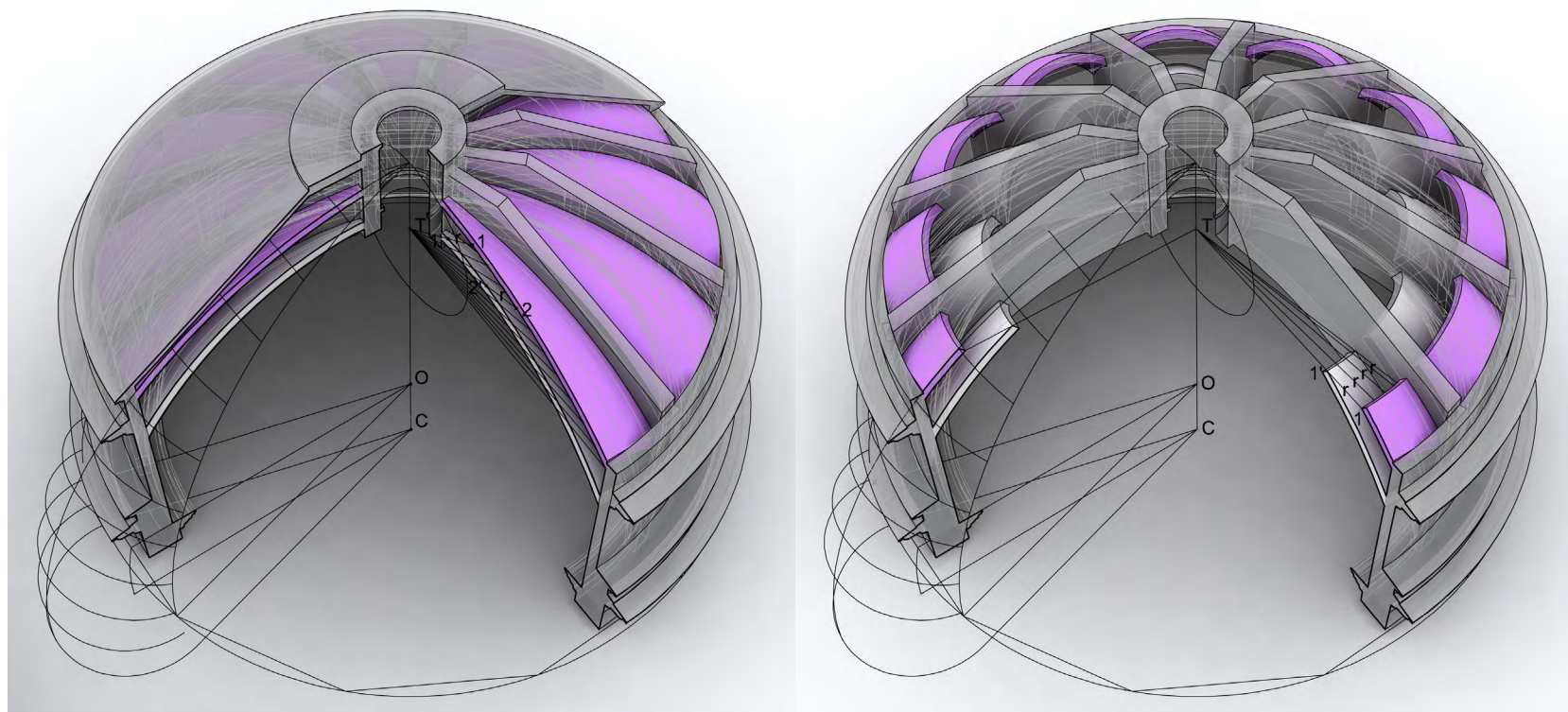
Secondo questa ipotesi, l'espressione a creste e vele si riferisce ad un'immagine legata non tanto alla forma quanto al modo in cui si realizzava la cupola. Essa, infatti, comprende due elementi concorrenti alla sua costruzione: le creste e le vele e, cioè un ordine di elementi portanti e un ordine di elementi portati. Questo procedimento definisce meccanicamente l'equilibrio delle porzioni di volta crescenti orizzontalmente, indipendentemente dalla non ancora avvenuta presa della malta. Successivamente, quando la presa sarà avvenuta, questa distinzione dei componenti non sarà più influente perché la resistenza alle sollecitazioni della struttura sarà affidata alla malta.

Nel caso della volta torica, vediamo un uso molto particolare e costruttivamente vantaggioso di questa tecnica. Per il momento questo rimane soltanto l'ipotesi, perché né la vela né la tessitura muraria sono rilevabili, però una serie di dati ci suggerisce che potrebbe essere stata impiegata proprio questa. Il primo sarebbe la necessità di questa forma per costruire la vela interna (quella concoidale). Il secondo sarebbe la posizione di questa ipotetica vela rispetto alla copertura rilevata (vedi figura 6 dove è rappresentata la sezione con l'ipotetica vela torica). E infine una serie di misure espresse in numeri interi dalle quali partirebbe la costruzione della vela esterna per arrivare successivamente a quel-

la interna. Il raggio rilevato di 9.6 braccia fiorentine della cupola deriva da un toro impostato sulla base di 10 braccia esatte, e la larghezza del costolone di 0.38 braccia è una conseguenza del rapporto di 1:4 tra i due raggi della superficie torica sulla base ottagonale. Questo sarebbe unico possibile rapporto che permette l'uso della spinapesce circolare, appartenente al piano.

Figg. 22, 23

Sintesi del processo costruttivo della volta a ombrello. In viola è rappresentata la ipotetica vela torica, mentre in grigio è quella concoidale. Il centro della cupola sta nel punto O, quello del toro nel punto C e il T è cento di trasformazione. Da notare che la vela torica ipotizzata si inserisce molto bene tra la vela concoidale e il manto della copertura.



NOTE

[1] I precedenti studi sulla volta ad ombrello sono sintetizzati in due articoli sopra menzionati e nella tesi di dottorato dell'autore dal titolo "La proiezione centrale nel pensiero scientifico – Dal Pantheon alla Cappella Pazzi".

[2] La struttura a doppio ombrello è stata rilevata durante gli restauri della copertura ed è documentata nei disegni di P.A. Rossi (vedi figura 2).

[3] La Cappella Pazzi, è già stata l'oggetto di uno studio basato sul rilievo laser scanner, nell'ambito di Laboratorio di Rilievo della Scuola Nazionale del Dottorato nel 2006. In questa occasione, il XXI ciclo del Dottorato fiorentino ha avviato un filone di ricerca tendente ad approfondire lo studio dell'edificio brunelleschiano.

[4] Baglioni, Leonardo. Cantono di Ceva, Stanislao. Fallavollita, Federico. Vinciguerra, Italia. *Sperimentazioni sulla cupola della cappella Pazzi*. Dal rilievo al modello interpretativo. In De Carlo, Laura (a cura di). *Informatica e sperimenti scientifici di rappresentazione*. Roma: Gangemi, 2007, pp. 325-334.

[5] Salemi, Piero. Un caso particolare: le "creste vele" di Villarceau. In Dalla didattica alla ricerca – Esperienze di studio nell'ambito del dottorato. E. Mandelli (a cura di). Firenze: Lito Terrazzi, 2007, pp. 178-183.

[6] Questo argomento è stato trattato nella tesi di dottorato dell'autore.

[7] Il rilievo tridimensionale della Cappella Pazzi è stato eseguito mediante laser scanner Leica HDS 3000. Le singole scansioni sono state messe a registro tramite il software Leica Cyclon 5.1. Il rilievo planimetrico del complesso di Santa Croce è stato fatto nell'ambito

del Progetto di ricerca Laboratorio Santa Croce, di cui è responsabile scientifico il Prof. Giacomo Pirazzoli, e al quale partecipano, per le proprie competenze, i Professori Belluzzi, Bartoli e Verdiani. L'autore è contrattista per la ricerca su Misure e proporzioni.

[8] I piani sono tangenti contemporaneamente a due cerchi meridiani contenuti nel piano radiale passante per il punto.

[9] Lossodromia, su una qualsiasi superficie di rotazione, è una linea caratterizzata dalla proprietà di tagliare tutti i meridiani sotto lo stesso angolo. Si ottiene anche "camminando" su una superficie con il passo costante, cioè poggiando i mattoni a "spina di pesce".

[10] Lossodromia, su una qualsiasi superficie di rotazione, è una linea caratterizzata dalla proprietà di tagliare tutti i meridiani sotto lo stesso angolo, o, come si può dire, di avere in ogni suo punto lo stesso azimut. È una lossodromia, la traiettoria di una nave che si rechi da un punto P1 a un punto P2, seguendo sempre una stessa rotta, ove si consideri la superficie del mare medio come un ellissoide di rotazione. Questa lossodromia è, in generale, una linea sghemba: è piana solo quando l'azimut vale 0° o 90° e si riduce a un meridiano o a un parallelo. Si ottiene anche camminando su una superficie con il passo costante, cioè poggiando i mattoni di stessa dimensione a spina di pesce.

[11] Wendland 2005.

[12] Manetti 1976.

[13] Bartoli 1977.

[14] Bartoli 1977.

BIBLIOGRAFIA

Baglioni Leonardo, Cantono di Ceva Stanislao, Fallavollita Federico, Vinciguerra Italia (2007), *Sperimentazioni sulla cupola della cappella Pazzi*. Dal rilievo al modello interpretativo, in De Carlo, Laura (a cura di), *Informatica e sperimenti scientifici di rappresentazione*, Gangemi, Roma, pp. 325-334.

Bartoli, Lando, (1977), *La rete magica di Filippo Brunelleschi*, Nardini Editore, Firenze, pp. 21-52.

Docci Mario, Migliari Riccardo (1989), *La costruzione della spinapesce nella copertura della sala ottagonale di Simon Mago nella fabbrica di San Pietro*, in *Palladio*, n. 3, pp. 61-72.

Emch, Arnold, (1899), *Note on the Loxodromic Lines of the Torus*, in *The American Mathematical Monthly*, Vol. 6, pp. 61-72. (<https://archive.org/details/jstor-2969550>)

Gruber David, Petrenell Martin, (2013), *Conchoid surfaces of quadrics*, in *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 59, pp. 36-53.

Gruber David, Petrenell Martin, Sendra Juana (2013), *Conchoid surfaces of quadrics*, in *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 30, pp. 35-44.

Radojevic, Nevena, (2014), *La volta a ombrello della Cappella Pazzi*. Proiezione della volta celeste, in Carlevaris, Laura (a cura di), *Linee di ricerca nell'area del Disegno*. 2, Parte I, XI congresso UID, Parma, pp. 147-153.

Radojevic, Nevena, (2014), *La concolide del toro della Cappella Pazzi*. Alcuni aspetti costruttivi, in Carlevaris, Laura (a cura di), *Linee di ricerca nell'area del Disegno*. 2, Parte II, XI congresso UID, Parma, pp. 489-498.

De Robertis Domenico, Tanturli Giuliano (1967), *Vita di Filippo Brunelleschi preceduta da La novella del Grasso di Antonio di Tuccio Manetti*, ed. critica di Domenico De Robertis con introduzione e note di Giuliano Tanturli, Il Polifilo, Milano.

Ricci, Massimo, (2001), *La cupola di Santa Maria del Fiore e il suo Modello*, in *Bollettino Ingegneri della Toscana*, n. 1(2).

Rossi Paolo Alberto, Laschi Giuliano, Roselli Piero, (1962), *Indagini sulla Cappella Pazzi*, in *Commentari*, n. 1/1962, pp. 24-41.

Rossi, Paolo Alberto, (1982), *Le cupole del Brunelleschi*, Calderini, Bologna.

Salemi, Piero (2007), *Un caso particolare: le "creste vele" di Villarceau*, in Mandelli, Emma (a cura di), *Dalla didattica alla ricerca. Esperienze di studio nell'ambito del dottorato*, Lito Terrazzi, Firenze, pp. 178-183.

Tanturli, Giuliano (2015), *Sulla vita di Filippo Brunelleschi scritta da Antonio Manetti, trentacinque anni dopo*, in Visioli, Monica (a cura di), *La biografia d'artista tra arte e letteratura. Seminari di letteratura artistica*, Edizioni Santa Caterina, Pavia, pp. 23-48.

Wendland, David (2005), *Volte in laterizio: aspetti costruttivi della tecnica tradizionale*, in *Costruire in laterizio*, Faenza, n. 107, pp. 55-60.

Wendland, David (2004), *Some considerations on the shape of the caps of vaults*, in *4th International Seminar "Structural analysis of historical structures"*, Leiden, Balkema, pp. 111-120.